Ministerul Educatiei si Cercetarii
Inspectoratul Scolar Judetean Constanta
Str. Mihai Eminescu nr.11, Constanta
Tel.: 0241/611913 Fax :0241/618880
www.isjcta.ro, e-mail: isj-cta@isjcta.ro
Cod postal: 900664

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 27.01.2007
CLASA a XI-a (OM1)

1. Fie $a, b \in R$ a.î. $a^2 - 4b < 0$ şi x_1, x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - ax + b = 0$.

a) Să se arate că:

$$(x_1A + x_2B + I_n)(x_2A + x_1B + I_n) = b(A^2 + B^2) + (a^2 - 2b)AB + a(A + B) + I_n,$$

pentru $(\forall)A, B \in M_n(R)$, cu proprietatea $AB = BA$.

b) Demonstrați că: $\det\left[b\left(A^2 + B^2\right) + \left(a^2 - 2b\right)AB + a\left(A + B\right) + I_n\right] \geq 0$, pentru $(\forall)A, B \in M_n(R)$, cu $AB = BA$.

prof.Cătălin Zîrnă

2. Fie $A \in M_n(Z)$, unde n este impar, $n > 2$.

a) Pentru $n = 3$, dacă matricea A are cel puțin o linie formată numai din numere impare, atunci A nu poate avea toți minorii de ordinul (n-1), numere impare.

b) Arătați că afirmația de la punctul a) este adevărată pentru orice n impar, $n > 2$.

prof. Nelu Chichirim

3. a) Demonstrați că: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \ldots + \dfrac{1}{4n}\right) = \ln 4$.

b) Demonstrați că: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+4} + \dfrac{1}{n+7} + \ldots + \dfrac{1}{n+3n-2}\right) = \dfrac{1}{3}\ln 4$.

prof. Doru Constantin Caragea

4. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, a. i. $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = 1 + n\sqrt{x_n},\ \forall n \in N^* \end{cases}$.

Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^2} = 1$.

G.M. 2006

Subiectele au fost selectate de profesorii: Doru Constantin Caragea, Gheorghe Andrei, Nelu Chichirim, Cătălin Zîrnă.

NOTĂ

- Timp de lucru 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7. Nu se acordă puncte din oficiu.