



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 27.01.2007

CLASA a XI-a (OM1)

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a^2 - 4b < 0$ și x_1, x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - ax + b = 0$.

a) Să se arate că:

$(x_1A + x_2B + I_n)(x_2A + x_1B + I_n) = b(A^2 + B^2) + (a^2 - 2b)AB + a(A + B) + I_n$,
pentru $(\forall) A, B \in M_n(\mathbb{R})$, cu proprietatea $AB = BA$.

b) Demonstrați că: $\det \left[b(A^2 + B^2) + (a^2 - 2b)AB + a(A + B) + I_n \right] \geq 0$, pentru $(\forall) A, B \in M_n(\mathbb{R})$,
cu $AB = BA$.

prof. Cătălin Zîrnă

2. Fie $A \in M_n(\mathbb{Z})$, unde n este impar, $n > 2$.

a) Pentru $n = 3$, dacă matricea A are cel puțin o linie formată numai din numere impare, atunci A nu poate avea toți minorii de ordinul $(n-1)$, numere impare.

b) Arătați că afirmația de la punctul a) este adevărată pentru orice n impar, $n > 2$.

prof. Nelu Chichirim

3. a) Demonstrați că: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{4n} \right) = \ln 4$.

b) Demonstrați că: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+7} + \dots + \frac{1}{n+3n-2} \right) = \frac{1}{3} \ln 4$.

prof. Doru Constantin Caragea

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, a. i. $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = 1 + n\sqrt{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = 1$.

G.M. 2006

Subiectele au fost selectate de profesorii: Doru Constantin Caragea, Gheorghe Andrei, Nelu Chichirim, Cătălin Zîrnă.

NOTĂ

- Timp de lucru 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7. Nu se acordă puncte din oficiu.