

Ministerul Educației și Cercetării

**Olimpiada Națională de Matematică 2007**  
**Etapa județeană și a Municipiului București**  
**3 martie 2007**  
**CLASA A X-A**

**Subiectul 1.** Fie numerele reale  $a, b, c$  astfel încât  $a, b, c \in (1, \infty)$  sau  $a, b, c \in (0, 1)$ . Arătați că

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b).$$

**Subiectul 2.** Cele  $2n$  pătrățele ale unui dreptunghi de dimensiuni  $2 \times n$  se colorează cu trei culori. Spunem că o anumită colorare are o *tăietură* dacă pe una din cele  $n$  coloane avem două pătrate de aceeași culoare. Să se determine:

- a) numărul colorărilor fără tăieturi;
- b) numărul colorărilor cu o singură tăietură.

**Subiectul 3.** Fie  $ABC$  un triunghi fixat, de laturi  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Pentru fiecare dreaptă  $\Delta$  din planul triunghiului notăm cu  $d_A, d_B, d_C$  distanțele de la  $A, B, C$  la  $\Delta$  și considerăm expresia

$$E(\Delta) = ad_A^2 + bd_B^2 + cd_C^2.$$

Demonstrați că dacă valoarea lui  $E(\Delta)$  este minimă atunci  $\Delta$  trece prin centrul cercului înscris în triunghi.

**Subiectul 4.** Fie  $u, v, w$  trei numere complexe de modul 1. Arătați că există o alegere a semnelor  $+$  și  $-$  astfel încât

$$|\pm u \pm v \pm w| \leq 1.$$

Timp de lucru 3 ore  
Toate subiectele sunt obligatorii