Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

3 martie 2007

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie numerele reale a, b, c astfel încât $a, b, c \in (1, \infty)$ sau $a, b, c \in (0, 1)$. Arătaţi că

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b).$$

Subiectul 2. Cele $2n$ pătrăţele ale unui dreptunghi de dimensiuni $2 \times n$ se colorează cu trei culori. Spunem că o anumită colorare are o *tăietură* dacă pe una din cele n coloane avem două pătrate de aceeaşi culoare. Să se determine:

a) numărul colorărilor fără tăieturi;

b) numărul colorărilor cu o singură tăietură.

Subiectul 3. Fie ABC un triunghi fixat, de laturi $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Pentru fiecare dreaptă Δ din planul triunghiului notăm cu d_A, d_B, d_C distanţele de la A, B, C la Δ şi considerăm expresia

$$E(\Delta) = ad_A^2 + bd_B^2 + cd_C^2.$$

Demonstraţi că dacă valoarea lui $E(\Delta)$ este minimă atunci Δ trece prin centrul cercului înscris în triunghi.

Subiectul 4. Fie u, v, w trei numere complexe de modul 1. Arătaţi că există o alegere a semnelor $+$ şi $-$ astfel încât

$$| \pm u \pm v \pm w| \leq 1.$$

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii