Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

3 martie 2007

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie $a_1 \in (0,1)$ şi $(a_n)_{n\geq 1}$ şirul de numere reale dat de următoarea relaţie de recurenţă:

$$a_{n+1} = a_n(1 - a_n^2),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot a_n$.

Subiectul 2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^*)$. Dacă $A \cdot {}^t A = I_n$, arătaţi că:

a) $|\mathrm{tr}\,(A)| \leq n$;

b) Pentru n impar avem $\det(A^2 - I_n) = 0$.

Cu $\mathrm{tr}(X)$ *s-a notat urma matricei* X*, adică suma elementelor de pe diagonala principală iar* ${}^tX$ *este trnspusa matricei* X

Subiectul 3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{a^2n^2 + bn} - an).$$

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$. Se notează cu A mulţimea punctelor sale limită, i.e. mulţimea punctelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care există un subşir al lui $(x_n)_n$ cu limita x.

a) Să se arate că $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset A$;

b) Să se determine A.

(*Cu* $[x]$ *s-a notat partea întreagă a numărului real* x)

Subiectul 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $B^2 = I_n$ şi $A^2 = AB + I_n$. Să se demonstreze că $\det(A) \leq \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii