Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

3 martie 2007

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Pentru un grup $(G,*)$ şi A, B submulţimi nevide ale lui G, notăm $A*B=\{a*b \mid a\in A \text{ şi } b\in B\}$.

a) Să se arate că dacă $n\in \mathbf{N}$, $n\geq 3$, atunci grupul $(\mathbb{Z}_n,+)$ se poate scrie sub forma $\mathbb{Z}_n=A+B$, unde A şi B sunt două submulţimi nevide ale lui $\mathbb{Z}_n$ cu $A\neq \mathbb{Z}_n, B\neq \mathbb{Z}_n$ şi $|A\cap B|=1$.

b) Dacă $(G,*)$ este un grup finit şi A, B sunt două submulţimi ale lui G iar $a\in G\backslash(A*B)$, să se arate că funcţia $f: A\to G\backslash B$ dată de $f(x)=x^{-1}*a$ este binedefinită şi injectivă. Deduceţi că dacă $|A|+|B|>|G|$, atunci $G=A*B$.

(*Cu* $|M|$ *s-a notat numărul elementelor mulţimii finite* M)

Subiectul 2. Se consideră funcţiile continue $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ şi $g:[0,1]\to(0,\infty)$. Să se arate că dacă f este crescătoare, atunci

$$\int_0^t f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\leq\int_0^t g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

pentru orice $t\in[0,1]$.

Subiectul 3. Determinaţi toate funcţiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică simultan condiţiile:

a) există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$;

b) $f(x)=\displaystyle\int_{x+1}^{x+2} f(t)\mathrm{d}t,\quad$ pentru orice $\;x\in\mathbb{R}$.

Subiectul 4. Fie k un corp cu 2^n elemente, $n\in\mathbf{N}^*$ şi polinomul $f=X^4+X+1$. Să se arate că:

a) dacă n este par, atunci f este reductibil în $k[X]$;

b) dacă n este impar, atunci f este ireductibil în $k[X]$.

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii