Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
3 martie 2007
CLASA A XII-A

Subiectul 1. Pentru un grup $(G, *)$ şi A, B submulţimi nevide ale lui G, notăm $A * B = \{a * b \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$.

a) Să se arate că dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, atunci grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ se poate scrie sub forma $\mathbb{Z}_n = A + B$, unde A şi B sunt două submulţimi nevide ale lui $\mathbb{Z}_n$ cu $A \neq \mathbb{Z}_n, B \neq \mathbb{Z}_n$ şi $|A \cap B| = 1$.

b) Dacă $(G, *)$ este un grup finit şi A, B sunt două submulţimi ale lui G iar $a \in G \setminus (A * B)$, să se arate că funcţia $f : A \to G \setminus B$ dată de $f(x) = x^{-1} * a$ este binedefinită şi injectivă. Deduceţi că dacă $|A| + |B| > |G|$, atunci $G = A * B$.

(*Cu* $|M|$ *s-a notat numărul elementelor mulţimii finite* M)

Subiectul 2. Se consideră funcţiile continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ şi $g : [0, 1] \to (0, \infty)$. Să se arate că dacă f este crescătoare, atunci

$$\int_0^t f(x)g(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^t g(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

pentru orice $t \in [0, 1]$.

Subiectul 3. Determinaţi toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică simultan condiţiile:

a) există $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$;

b) $f(x) = \displaystyle\int_{x+1}^{x+2} f(t)\mathrm{d}t, \quad$ pentru orice $\; x \in \mathbb{R}$.

Subiectul 4. Fie k un corp cu 2^n elemente, $n \in \mathbf{N}^*$ şi polinomul $f = X^4 + X + 1$. Să se arate că:

a) dacă n este par, atunci f este reductibil în $k[X]$;

b) dacă n este impar, atunci f este ireductibil în $k[X]$.

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii